定曲率空間に於ける isoperimetr c inequality について

本　部　均
出　石　隆

1949年の Portugaliae Mathematica に H. Hadwiger がK次元 Euclid 空間の iosperimetric inequality の証明をしているが，それに対応してこゝで n 次元 non-Euclidean 空間に於ける isoperimetric inequality を求める。

n 次元定曲率空間内の任意な有界な閉点集合に於いて

（1）　$V=\lim\limits_{\rho\to 0} V\rho$

及び

（2）　$F=\lim\limits_{\rho\to 0}\inf\dfrac{V\rho-V}{\rho}$

によつて volume V 及び Oberfläche F を示す。ここで $V\rho$ は距離 ρ に於けるaüsseren Parallelmenge の Jordan measure を示す。

そのとき isoperimetric inequality

定曲率 $K>0$ のとき

$$(3)\quad V_n\leqq\omega_{n-1}\int_0^{\sqrt[n-1]{\frac{Fn-1}{\omega_{n-1}}}}\frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$K<0$ のとき

$$(3')\quad V_n\leqq\omega_{n-1}\int_0^{\sqrt[n-1]{\frac{Fn-1}{\omega_{n-1}}}}\frac{t^{n-1}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\qquad(4)\quad\omega_{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

を証明する。ここで ω_{n-1} は n 次元 Euclidian Space 内の $n-1$ 次元単位球の $n-1$ 次元 volume を示す

（2）が存在しない場合には $F=\infty$ とおく。この場合に於ても（3），（3'）は成立する。

空間内に固定点 z をえらぶ。そして有界な閉点集合 A を部分集合として含むような z を中心とした半径 R（A）の最も小さた閉じた球 K（A）を考える。更に r（A）及び r（$A\rho$），簡単に r 及び $r\rho$ は集合 A 及びその aüsseren Parallelmenge $A\rho$ と同じ volume をもつ球の半径とす。

さて固定した ρ に対して集合函数

（5）　$\varphi(A)=r(A\rho)-r(A)-\rho$ を考える。

$\varphi(A)>-\rho$ なる故

（6）　$f(R)=\inf\varphi(A)$　　　$\{R(A)\leqq R\}$

が存在する

更にこの函数に対して次の性質を後程証明する。即ち

(a)　$f(0)=0$

(b)　$f(R)$は単調減少

(c)　$f(R)$は $R\geqq 0$ に対して右方連続

(d)　$f(R)$は$R>0$ に対して左に lokal に constant である。

容易にわかるように，性質 (a), (b), (c), (d) を満足する唯一つの函数は $f(R)=0$ である。

それ故各々の集合 Aに対して $\varphi(A)\geqq 0$ 即ち $r\rho\geqq r+\rho$ が成立する。これを利用して (3) 及び (3′) を求めよう。

(i)　$K>0$ のとき

先ず $n+1$ 次元 Euclid 空間内の n 次元単位球 S^n 上で半径γなる球の volume を求める。半径 γ の球内の任意点 $(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n, z)$ をとると　$z\geqq\cos\gamma$

而して $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + z^2 = 1$

$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1-z^2 \leqq 1-\cos^2\gamma=\sin^2\gamma$

一方 $(x_1, x_2\cdots\cdots, x_n, z)$ は normal の unit vector である。而して z はその vector が z—axis となす角の余弦である。依つて半径 γ の球の volume は $\int \frac{1}{z}\, dx_1 dx_2\cdots\cdots dx_n$である。

一方 $dx_1\, dx_2\cdots\cdots dx_n = d\sigma\, dr$ である。

ここで $d\sigma$ は n 次元 Euclidean Space 内の $n-1$ 次元 sphere の $n-1$ 次元 volume element を示す。

従つて $\int \frac{1}{z}\, dx_1\, dx_2\cdots\cdots dx_m = \int \frac{dx_1\, dx_2\cdots\cdots dx_n}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} = \int \frac{r^{n-1}\omega_{n-1}\, dr}{\sqrt{1-r^2}}$

而して積分範囲は$r=0$ から $r=\sin\gamma$ までである。

以上より S^n 上で半径 γ の球の volume は

$$V_n(\gamma)=\omega_{n-1}\int_0^{\sin\gamma} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

一方 $r\rho\geqq r+\rho$ である。

$$\therefore\ V_n(r\rho)=\omega_{n-1}\int_0^{\sin r\rho} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \geqq \omega_{n-1}\int_0^{\sin(r+\rho)} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

$$\therefore\ F_{n-1}\geqq \liminf_{\rho\to 0} \frac{V_n(r+\rho)-V_n(r)}{\rho} = \omega_{n-1}\frac{d}{dr}\int_0^{\sin r} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \omega_{n-1}\sin^{n-1} r$$

$$\therefore\ \left(\frac{F_{n-1}}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \geqq \sin r$$

$$\therefore\ V_n=\omega_{n-1}\int_0^{\sin r} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \leqq \omega_{n-1}\int_0^{\sqrt[n-1]{\frac{F_{n-1}}{\omega_{n-1}}}} \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

例えば $n=2$ のときは $V^2+F^2-4\pi V\geqq 0$ となる。

(ii)　$K<0$ のとき

$K>0$ のときと同様にして $K=-1$ なる n 次元定曲率空間上で半径 γ なる球のvolumeは

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}d\sigma\ dr=\int\frac{r^{n-1}\omega_{n-1}}{\sqrt{1+r^2}}\ dr$$

而して積分範囲は $r=0$ から $r=\sinh\gamma$ までである。依つて constant negative curvature 上で半径 γ の球の volume は

$$V_n(\gamma)=\omega_{n-1}\int_0^{\sinh\gamma}\frac{t^{n-1}}{\sqrt{1+t^2}}\ dt \text{ である。}$$

かくして

$$V_n\leqq\omega_{n-1}\int_0^{\sqrt[n-1]{\frac{Fn-1}{\omega_{n-1}}}}\frac{t^{n-1}}{\sqrt{1+t^2}}\ dt \text{ が成立する。}$$

例えば $n=2$ のときは $F^2-V^2-4\pi V\geqq 0$ となる。以上より求める証明は函数 $f(R)$ の四つの性質（a），（b），（c），（d）の証明に帰せられる。

（a）及び（b）の性質は（6）で与えられた定義より直接出て来る。

（c）の 証 明

証明の準備として次のことをおく。即ち有界な閉点集合 A と B との距離は $d=\inf\rho$ $(A^\rho\geqq B,\ B^\rho\geqq A)$ によつて明らかにされ $\lim_{\nu\to\infty}A^\nu=A^0$ という事は $\lim_{\nu\to\infty}d(A^\nu,\ A^0)=0$ によつて示される収斂を意味する。その時関係式

(α)　$\lim_{\nu\to\infty} r\ (\overset{\nu}{A}{}^{\rho})=r\ (\overset{0}{A}{}^{\rho})$

(β)　$\lim_{\nu\to\infty}\sup\ r\ A^\nu\leqq r(A^0)$　が成立する

（(α) の 証 明）

この証明は $r(A^\rho)$ の ρ が fixed なる時 A に関する連続を証明すればよろしい。r の定義よりこれは $V(A^\rho)$ の A に関する連続である。

さて $A=A^0$ で連続とは $\varepsilon>0$ が与えられたとき $\delta(\varepsilon)>0$ が定まり，$d(A_1A^0)<\delta$ なる A に対して

$|V(A_\rho)-V(A_{\rho}{}^0)|<\varepsilon$　という事である。

$d\ (A,A^0)<\delta$ ならば $A\subset\overset{0}{A}{}^{\delta}$，$A^0\subset A^\delta$

$\delta<\rho$ にとるものとすると

$$-[V(\overset{0}{A}{}^{\rho})-V(\overset{0}{A}{}^{\rho-\delta})]\leqq V(A^\rho)-V(\overset{0}{A}{}^{\rho})\leqq(\overset{0}{A}{}^{\rho+\delta})-V(\overset{0}{A}{}^{\rho})$$

であるからこの左右両項を

$V(\overset{0}{A}{}^{\rho})-V(\overset{0}{A}{}^{\rho-\delta})<\varepsilon,\ V(\overset{0}{A}{}^{\rho+\delta})-V(\overset{0}{A}{}^{\rho})<\varepsilon$

なるように δ が定められればよい事になる。これは $V(\overset{0}{A}{}^{\rho})$ の A^0 を fix したときの ρ に関する continuity である（$\rho<0$）

（イ）　$V(\overset{0}{A}{}^{\rho+\delta})-V(\overset{0}{A}{}^{\rho})<\varepsilon$　ならしめる事

今 $\overset{0}{A}_\rho \subset \bar{A}$ なる $\bar{A}$ を考えれば　$\overset{0}{A}_{\rho+\delta} < \bar{A}^\delta$

$V(\overset{0}{A}_{\rho+\delta}) - V(\overset{0}{A}_\rho) \leqq V(\bar{A}_\delta) - V(\overset{0}{A}_\rho)$

$$= [V(\bar{A}_\delta) - V(\bar{A})] + [V(\bar{A}) - V(\overset{0}{A}_\rho)]$$

である。$V(\overset{0}{A}_\rho)$ は $\overset{0}{A}_\rho$ の Jordan measure であるから充分こまかい格子に分けた空間の立方体有限個の和 $\bar{A}$ で $\overset{0}{A}_\rho$ を覆い

$V(\bar{A}) - V(\overset{0}{A}_\rho) < \frac{\varepsilon}{2}$

ならしめ得る。この様に $\bar{A}$ をきめてしまう。$\bar{A}$ は辺の長さ a の立方体 m 個からなるとしよう。すると

$V(\bar{A}) = m\,a^n$

$\because\ V(\bar{A}_\delta) < m\,(a+2\delta)^n$

$V(\bar{A}_\delta) - V(\bar{A}) < m\,[(a+{}_2\delta)^n - a^n]$

m, a 共に const. であるから，δ を充分小にすれば

$V(\bar{A}_\delta) - V(\bar{A}) < \frac{\varepsilon}{2}$　ならしめ得る。

(ロ)　$V(\overset{0}{A}_\rho) - V(\overset{0}{A}_{\rho-\delta}) < \varepsilon$ ならしめ得る事

A^0 の可附番個の点を中心とする半径 ρ の sphere S_1, S_2, ……, S_n……を適当にとり

$\underline{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$　但し $T_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$　とすると

$V(\overset{0}{A}_\rho) = V(\underline{A}) = \lim_{n\to\infty} V(T_n)$

なる事が証明出来る。

右辺の $V(T_n)$ は monotone increasing である。

今 $\varepsilon > 0$ が与えられ

$V(\overset{0}{A}_\rho) - V(T_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

となる様に n をとり，これを fix しておく。すると

$\overset{0}{A}_\rho > \bigcup_{i=1}^{n} S_i$

であるが S_i を今 $S_i(\rho)$ と書いておこう。

$S_i(\rho)$ の中心は A^0 の点であるから $\overset{0}{A}_{\rho-\delta}$ は $S_i(\rho)$ と同じ中心の半径 $\rho-\delta$ の sphere $S_i(\rho-\delta)$ を含む。よつて

$V(A^0_{\rho-\delta}) \geqq V\ (\bigcup_{i=1}^{n} S_i\ (\rho-\delta))$ である。

$V(T_n) - V(\overset{0}{A}_{\rho-\delta}) \leqq V\ (\bigcup_{i=1}^{u} S_i(\rho)) - V\ (\bigcup_{i=1}^{u} S_i\ (\rho-\delta))$

$$\leqq [V \text{ 半径 } \rho \text{ の sphere}) - V(\text{ 半径 } \rho-\delta \text{ の sphere})] \times n$$

n, ρ は fixed 故に δ を小にすれば右辺は $< \frac{\varepsilon}{2}$ ならしめ得る。

依つて $V(\overset{0}{A}_\rho) - V(\overset{0}{A}_{\rho-\delta}) \leqq \varepsilon$ ならしめ得る。

((β) の 証 明)

仮定された収斂 $A_\nu \to A^0$ の故に $\varepsilon > 0$ に対して適当な ν_0 をとると $\nu > \nu_0$ に対して

$A_\nu \leqq \overset{0}{A_\varepsilon}$ が成立する様な ν_0 が定まる。それ故にその時は $r\ (A_\nu) \leqq r\ (\overset{0}{A_\varepsilon})$

$\therefore \limsup_{\nu\to\infty} r(A_\nu) \leqq r\ (\overset{0}{A_\varepsilon})$

$\varepsilon \to 0$ でそのとき (β) が証明される。

さて定義（6）より $R(A_\nu) \leqq R$ で

$f\ (R) = \lim_{\nu\to\infty} \varphi\ (A_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \{ r\ (\overset{\nu}{A_\rho}) - r\ (A_\nu) - \rho \}$

なる様な集合 A^ν の folge がある。

Auswahlsatz より $\lim_{\nu\to\infty} A_\nu = A^0$ ととつてよい。

(α) 及び (β) を顧慮して $f(R) \geqq r\ (\overset{0}{A_\rho}) - r\ (A^0) - \rho$

それ故 $f(R) = \varphi(A^0)$ を生ず。即ち $R(A^0) \leqq R$ の故に (γ) $\underline{f(R) = \varphi(A^0)}$ であらねばならぬ。

更に $R_\nu > R_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$)及び $\lim_{\nu\to\infty} R_\nu = R$ であるとしよう。

(γ) の故に $f(R_\nu) = \varphi(A^0{}_\nu)$ がおかれる事が出来る。

（b）より $\lim_{\nu\to\infty} f(R_\nu)$ が存在する。

この極限値は，$\varphi\ (A^0{}_\nu)$ のどれかと一致するから再び Auswahlsatz より $\lim_{\nu\to\infty} \overset{0\nu}{A} = A^{00}$ と仮定して差支えない。

上と全く同様にして $\lim_{\nu\to\infty} f\ (R_\nu) \geqq \varphi\ (A^{00})$

然るに一方 $R(A^{00}) \leqq R$ であるから，他方 $\varphi\ (A^{00}) \geqq f\ (R)$ である。それ故 $\lim_{\nu\to\infty} f(R_\nu) \geqq f(R)$ を生じ（b）の故に $\lim_{\nu\to\infty} f\ (R_\nu) = f\ (R)$ を生ず。かくして（c）は証明された。

（d）の 証 明

さて（d）を証明するために，前論文に於て証明した対称変換を用いる（本部均，出石隆;定曲率空間に於ける Steiner の対称変換の拡張について）即ち z を通る一平面 Ω に関して点集合 A を対称な点集合 $\bar{A}$ に移す対称変換を S で表わし記号的に $\bar{A} = S(A)$ と書く。

$R(\bar{A}) \leqq R(A)$ なる事は明らかなり

更に次の事を証明しよう。

(δ) $\underline{A \neq K(A)}$ なる場合には $\bar{A} = S_m \cdots\cdots S_0(A)$ に対して関係式 $R(\bar{A}) < R\ (A)$ を生ずる様な有限個の変換 $S_0,\ S_0,\ \cdots\cdots S_n$ が発見される。

（証　明）

W は球 $K(A)$ の Rand (Oberfläche) を示す。そして $X \subseteqq K(A)$ に対して $T(X) = W - WX$ とおく。明らかに $\bar{X} = S(X)$ に対して (*) $T(\bar{X}) \supseteqq T(\times) + T\ (X)^*$ が成立する。

ここで Y^* は Ω に関して Y に対称な点集合を示す。先ず S_0 は任意な変換であるとしよう。そして $\bar{A} = S_0(A)$ であるとしよう。仮定 $A \neq K(A)$ の故に $(n-1)$ 次元の開集合 $T(\bar{A})$ は空ではない。故に $n-1$ の次元の Spherische Kalote U_0 を得る。

U_i ($i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots n$) はその全体が W を überdecken するような U_0 に合同な Kalote であるとしよう。そして S_i は二つの Kalote U_0 と U_i の Symmetriebene に

関して，その結果として生ずる様な対称変換を示す。それ故関係式(*)の応用によつて $T(\bar{A})=W$ を生ず。

$\therefore\ \bar{A}W=0$

それ故 $\bar{A}$ 及びWの閉じている事から更に $R(\bar{A})<R(A)$ となる。

次に

(ξ)　$r(\bar{A})=r(A)$

(μ)　$r((\bar{A})\rho)\leqq rA\rho$　を示そう。

(ξ) は対称変換によつて volume の不変な事より明らかなり。

((μ) の 証 明)

このために(**)　$(\bar{A})\rho\subseteqq(\overline{A\rho})$ を使用す。

これが言われれば　$r((\bar{A})\rho)\leqq r((\overline{A\rho}))$

而して $r(A\rho)=r((\overline{A\rho}))$

$\therefore\ r((\bar{A})\rho)\leqq r(A\rho)$

依つて(**)を証明すればよい。

(1)　$P\in(\bar{A})\rho$ を満足する任意の点 P に対して (2) $P\in Q\rho$が生ずるような $Q\in\bar{A}$ なる Q がある。

G が S の Symmetrisierungsebene に Qを通つて垂直にひかれた直線を示すなら

(3)　$P\in(G\bar{A})\rho$ である。又 equidist line 同志は equidist な性質より

(4)　$(G\bar{A})\rho\subseteqq((\overline{GA})\rho)$ である。又当然

(5)　$((GA)\rho)\subseteqq(A\rho)$

依つて (3), (4), (5) より　$P\in((A\rho)$

故に $(A\rho)$内の点は必ず$(\overline{A\rho})$内の点なる故　$(\bar{A})\rho\subseteqq(\overline{A\rho})$

依つて(**)は成立し，従つて(μ)は証明出来た。

さて $R>0$ 及び $f(R)=\varphi(A^0)$, $R^0=R(A^0)\leqq R$ であるとしよう。

i)　$R_0<R$ なら Intervall $R^0<R'<R$ に於て明らかに $f(R')=f(R)$ である。換言すれば，$f(R)$ はこの場所で左に lokal に const. である。

ii)　$R^0=R$ なるとき

(イ)　$A^0\equiv K(A^0)$ なる場合

この場合はたゞちに $f(R)=0$，そして (a), (b) の故に再び Intervall $0<R'<R$ に於て $f(R')=f(R)=0$ である。

(ロ)　$A^0\not\equiv K(A^0)$ なる場合

有限個の対称変換によつて (δ) より $\bar{R}=R(\bar{A})<R$ とする事が出来る。そこに於て (ξ) 及び (μ) を顧慮する事によつて，$\varphi(\bar{A})\leqq f(R)$ である。そそれ故に又，$f(\bar{R})\leqq f(R)$ である。然しながら (b) の故に，$f(\bar{R})=f(R)$

かくして再び左側の Intervall $\bar{R}<R'<R$に於て $f(R')=f(R)$ なる事が得られる。

以上より(d)は証明された。

従つて (3) 及び (3') は証明されたことになる。